

# 2024 年广东省重点中学信息学邀请赛 (GDKOI 2024)

提高组 第二试

2024 年 1 月 7 日

## 注意事项

1. 严格按照题目所要求的格式进行输入、输出，否则严重影响得分。
2. 题目测试数据有严格的时间限制，超时不得分。
3. C/C++ 中函数 `main()` 的返回值类型必须是 `int`，程序正常结束时的返回值必须是 0。
4. 输入文件格式不用判错；输入输出文件名均已给定，不用键盘输入。
5. 评测环境为 NOI 系列活动标准竞赛环境，编译器版本为 `g++ 9.4.0`。
6. 若无特殊说明，结果的比较方式为全文比较（过滤行末空格及文末回车）。
7. 对于 C++ 选手，64 位整数输入输出格式为 `%lld`。
8. 选手提交的程序源文件必须不大于 100KB。
9. 对于 C++ 语言的编译选项为 `-O2 -std=c++14`

试题名称	不休陀螺	计算	染色
提交文件名	<code>top.cpp</code>	<code>calculate.cpp</code>	<code>set.cpp</code>
输入文件名	<code>top.in</code>	<code>calculate.in</code>	<code>set.in</code>
输出文件名	<code>top.out</code>	<code>calculate.out</code>	<code>set.out</code>
时间限制	2 秒	2 秒	1.5 秒
空间限制	512 MB	512 MB	512 MB
满分	100	100	100

## 第一题 不休陀螺

提交文件: top.cpp  
 输入文件: top.in  
 输出文件: top.out  
 时间空间限制: 2 秒, 512 MB

有  $n$  张牌组成一个序列, 每张牌用一个二元组  $(a_i, b_i)$  表示, 意味着打出这张牌需要消耗  $a_i$  点费用, 打出后可以获得  $b_i$  点费用。

接下来你可以选择一个区间  $[l, r]$  将这个区间中的卡取出来作为你的卡组。

开始时你的卡组会按照随机顺序排列并且你有  $E$  点费用, 然后你会依次从前往后打出这个排列中的卡。

当你打完这个排列中的卡后你的卡组又会重新随机排列然后你再依次打出, 直到你无法再打出一张牌 (当前费用小于下一张牌需要消耗的费用) 时停止。

如果一个卡组无论在什么情况下都能够无限打下去, 我们则称这卡组可以”陀螺无限”。

现在求有多少个区间组成的卡组能够”陀螺无限”。

### 输入格式

第一行输入两个非负整数  $n, E$  分别表示卡牌序列长度和初始能量值  $E(1 \leq n \leq 10^6, 0 \leq E \leq 10^9)$ 。

接下来一行  $n$  个非负整数  $a_i(0 \leq a_i \leq 10^9)$  表示每张卡牌打出需要消耗的能量。

接下来一行  $n$  个非负整数  $b_i(0 \leq b_i \leq 10^9)$  表示每张卡牌打出后能获得的能量。

### 输出格式

输出一行一个整数表示有多少个区间组成的卡组能够”陀螺无限”。

### 样例数据

top.in	top.out
5 10 9 10 10 0 2 8 5 6 2 5	4
5 10 8 1 6 4 10 7 6 1 8 5	5

### 数据范围

本题使用子任务捆绑测试。

对于 100% 的数据,  $1 \leq n \leq 10^6, 0 \leq E, a_i, b_i \leq 10^9$ 。

Subtask 1(20%):  $1 \leq n \leq 5000$ 。

Subtask 2(10%):  $b_i \geq a_i$ 。

Subtask 3(10%):  $E = 0$ 。

Subtask 4(10%):  $0 \leq a_i, b_i \leq 1$ 。

Subtask 5(20%):  $a_i \times b_i = 0$ 。

Subtask 6(30%): 无特殊限制。

## 第二题 计算

提交文件: calculate.cpp  
 输入文件: calculate.in  
 输出文件: calculate.out  
 时间空间限制: 2 秒, 512 MB

定义  $F(x, a, b) = \gcd(x^a - 1, x^b - 1) + 1, x > 0$ 。

特别的, 如果  $a = 0$  或  $b = 0, F(x, a, b) = 0$ 。

现在给出五个非负整数  $m, a, b, c, d$ 。

令  $L = F(m, a, b) + 1, R = F(m, c, d)$ 。

问集合  $\{L, L + 1, L + 2, \dots, R - 2, R - 1, R\}$  有多少个子集和是  $m$  的倍数。

由于答案可能很大, 你只需要输出方案数对 998244353 取模后的结果就可以了。

### 输入格式

输入第一行为一个整数  $T$ , 表示数据组数。

接下来一行  $T$  行, 每行五个非负整数  $m, a, b, c, d$ 。

### 输出格式

对于每组数据, 输出答案。

### 样例数据

calculate.in	calculate.out
3	8
5 0 0 2 1	1024
4 1 2 2 4	527847872
8 3 2 4 6	

### 样例解释

经过计算可知  $L=1, R=5$ , 集合是  $1, 2, 3, 4, 5$ , 满足条件的子集和有以下 8 个:

$\{\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$

### 数据范围

数据点编号	m	L	R	a	b	c	d	T	特殊性质
1	$m=2$	$L=1$	$R=2$	$a=0$	$b=0$	$c \leq 10$	$d \leq 10$	$T \leq 5$	无
2	$m \leq 10$	$L=1$	$R=m$	$a=0$	$b=0$	$c \leq 10$	$d \leq 10$	$T \leq 5$	无
3	$m \leq 5$	$L \leq 10^3$	$R \leq 10^3$	$a \leq 10$	$b \leq 10$	$c \leq 10$	$d \leq 10$	$T \leq 5$	1
4-6	$m \leq 20$	$L \leq 2 \times 10^3$	$R \leq 2 \times 10^3$	$a \leq 10$	$b \leq 10$	$c \leq 10$	$d \leq 10$	$T \leq 5$	无
7	$m \leq 20$	$L \leq 10^5$	$R \leq 10^5$	$a \leq 10^2$	$b \leq 10^2$	$c \leq 10^2$	$d \leq 10^2$	$T \leq 5$	2
8,9	$m \leq 80$	$L \leq 10^9$	$R \leq 10^9$	$a \leq 10^2$	$b \leq 10^2$	$c \leq 10^2$	$d \leq 10^2$	$T \leq 5$	无
10-13	$m \leq 2 \times 10^3$	$L \leq 10^{18}$	$R \leq 10^{18}$	$a \leq 10^3$	$b \leq 10^3$	$c \leq 10^3$	$d \leq 10^3$	$T \leq 5$	无
14-17	$m \leq 10^5$	$L \leq 10^{18}$	$R \leq 10^{18}$	$a \leq 10^3$	$b \leq 10^3$	$c \leq 10^3$	$d \leq 10^3$	$T \leq 5$	无
18-20	$m \leq 10^7$	$L \leq 10^{18}$	$R \leq 10^{18}$	$a \leq 10^3$	$b \leq 10^3$	$c \leq 10^3$	$d \leq 10^3$	$T \leq 10^4$	无

特殊性质 1:  $R - L + 1 \leq 20$ ; 特殊性质 2:  $R - L + 1 \leq 2000$

对于全部数据, 保证  $L < R, m > 0$

## 第三题 染色

提交文件: `set.cpp`  
 输入文件: `set.in`  
 输出文件: `set.out`  
 时间空间限制: 1.5 秒, 512 MB

Alice 非常喜欢二进制, 她认为事物只有和二进制有关才是美的。

一天, 她奇思妙想了一种图案, 并打算在长宽都为  $2^n$  的网格上画出她心中所想的图案。

网格的格子只有黑色和白色两种, 一开始都是白色。

现在 Alice 规定一种绘画操作为: 选定一个格子, 使它自己和相邻上下左右的网格颜色反转, 即原本黑色会变成白色, 白色会变成黑色。

Alice 还规定网格的第一行和最后一行相邻, 第一列和最后一列也相邻。

现在 Alice 希望你给出一个操作方案或告诉无解。如果有多个方案, 输出任意一个即可。

### 输入格式

第一行一个正整数  $n$ 。

接下来一个  $2^n \times 2^n$  的矩阵, 表示 Alice 所想的图案。其中 0 表示白色, 1 表示黑色。

### 输出格式

第一行一个数  $ans$  表示操作次数, 或输出  $-1$  表示无解。

接下来  $ans$  行, 每行一个坐标表示操作位置。其中每一维坐标范围均为  $[0, 2^n - 1]$ 。

### 样例数据

set.in	set.out
2	7
0 0 1 1	0 0
1 0 1 0	1 0
0 0 0 0	1 3
1 1 1 0	2 1
	3 1
	3 2
	3 3

### 数据范围

对于 20% 的数据  $n = 2$ 。

对于另外 15% 的数据  $n = 4$ 。

对于另外 15% 的数据  $n = 7$ 。

对于 100% 的数据,  $n \leq 11$ 。